Thr. G. GEORGIADES: Nennen und Erklingen: IIa. Ton (2): IIa. Sonido (2): "Sectio *canonis* (Sectio canonis: Partición del monocordio) - *Definición empírica y física del sonido* (Empirische und physikalische Tonbestimmung) - *Inconmensurabilidad* (Inkommensurabilität)", pp. 064-077].

Sectio canonis (Partición del monocordio)

[p. 064] Ahora voy a ocuparme del tradicional escrito, atribuido al célebre matemático Euclides, bajo el título de *κατατομη κανονος* (Sectio canonis, Partición del monocordio)[1], una obra que se muestra como pitagórica en la exposición de la armonía aritmética. Sólo los dos últimos teoremas[2] ofrecen una aplicación práctica a la cuerda de acuerdo con el título[3] de la obra. Pero, la parte principal se ocupa de los teoremas teórico-numéricos, puramente matemáticos, especulativos, que han de ser contemplados en el trasfondo de *todo* Euclides, de los 13 libros de sus "Elementos". El fenómeno sonoro [musical] se constituye mediante la teoría numérica, y viceversa: el área de los números es comprendido (captado) desde el fenómeno sonoro. Nos asombramos de la cohesión, lógica y claridad que se manifiestan en la *Sectio canonis*.

En primer lugar, el preámbulo completo[4]: "Si hay sosiego e inmovilidad, entonces hay silencio. Y si hay silencio y no se mueve nada, entonces no se oye nada. Si por tanto tiene que sonar algo, antes tiene que tener lugar un golpe y un movimiento[5]. **[p. 065]** Puesto que todos los sonidos surgen por un golpe (empujón) y este golpe es imposible sin un movimiento anterior, y puesto que, de los movimientos, unos son más apretados[6] y otros más tenues[7], y los más apretados producen sonidos más altos (agudos), los tenues, sin embargo, más bajos (graves), - es necesario pues, que los más altos, porque son más apretados, estén compuestos de movimientos más rápidos, y los más tenues de

[1] [= 157] Estructura de la obra: A un breve preámbulo, siguen 4 secciones con un total de 20 breves teoremas. 1ª. Sección, teoremas 1-9, pura teoría de los números; 2ª. Sección, teoremas 10-16, transmisión al fenómeno sonoro; 3ª. Sección, teoremas 17 y 18, en virtud de la precedente fijación de la afinación de las cuerdas, p. e., de la lira; 4ª. [Última] Sección, 2 teoremas, 19 y 20, aplicación al monocordio, que se llama canon (κανων), a la vez, "regla" referida a la regla del sistema musical, aplicada prácticamente al monocordio. Por lo tanto, el "canon" se usó también para el instrumento, denominado después monocordio, y, en efecto, hasta hoy día no sólo en el área de la lengua griega, sino también de la árabe para un instrumento de una o varias cuerdas, que funciona según el principio del monocordio, es decir, por medio del acortamiento de las cuerdas. La *Sectio canonis* está publicada en: Musici Scriptores Graeci. Aristoteles, Euclides, Nichomachus, Bacchius, Gaudentius, Alypius… Recognovit prooemiis et índice instruxit Carolus Janus, Lipsiae 1895, Reimpresión Hildesheim 1962. P. 146-166 (= Jan, MSG).

[2] [= 158] Y estos deben ser un añadido posterior (ver B. L. van der Waerden, a. a. O. (nota 146 [1]), p. 163-199, especialmente p. 164 y 177.

[3] [= 159] Es seguro, que el título procede, en principio, de una época posterior.

[4] [= 160] No existe aún una traducción completa de la *Sectio canonis* al alemán.
(Nota del editor:) Para la siguiente exposición de la *Sectio canonis* como también para la traducción sirve de base la cinta-magnetofónica-apuntes de las clases (*Vorlesungen*) del semestre-de-invierno 1969/70 (ver nota 6, al final). Se ha conservado el carácter de hablado.
[*Nota del traductor J. V. González Valle.: Por entonces (Winter-Semester 1969-1970), cursaba yo mis estudios de Musikwissenschaft en la Uni de Múnich. Así que tuve el gran honor de poder asistir personalmente a estas brillantes Vorlesungen de Georgiades en un aula magna, a rebosar, del Seminario de Musicología de la Universidad – LMU - de Múnich: El título de las Vorlegungen era:* **"Harmonia, Rhythmós, Nómos, Musike"**].

[5] [= 161] La cuerda no suena por sí misma; tiene que producirse primeramente el sonido por medio de una pulsación, un rasgueo. Pero ahí no aparece nada sobre la cuerda; sólo se mantiene esta constatación general.

[6] [= 162] Por lo tanto más rápidos; movimientos sucesivos en distancias cortas.

[7] [= 163] Por lo tanto más lentos; movimientos sucesivos en distancias mayores.

movimientos más bajos, más lentos[8]. Los sonidos más agudos ceden (en altura) por sustracción (reducción) de movimiento, los graves aumentan (en altura) por añadidura (aceleración) de movimiento. Por lo tanto, tenemos que decir[9], que los sonidos se componen de partículas[10], ya que cambian por medio de añadir o reducir. Pero, todo lo que se compone de partículas, están en proporción numérica unas con otras, por lo tanto, los sonidos tienen que estar unos con otros en proporción numérica[11]. De los números se dice (se entiende), que unos están en proporción múltiple, los otros en proporción superdivisible y otros más lejanos en otra proporción[12]. Por lo tanto, también los sonidos tienen que estar en semejantes proporciones unos con otros. Pero de estos, los múltiples y superdivisibles se denominan cada uno con un nombre[13].

Pero sabemos, que en los sonidos (intervalos) unos suenan juntos y otros separados[14], y que los que suenan juntos producen una unión (mezcla) de dos[15], no en cambio los que suenan separados. Puesto que esto es así, es de esperar, que los intervalos que suenan juntos, ya que crean una unidad de dos sonidos, pertenecen a las proporciones numéricas, que son designadas con un nombre[16]; bien intervalos múltiples, o bien superdivisibles."

Qué hay aquí que no esté deducido (dilucidado), sin incluir para nada al empirismo – incluso hasta la experiencia básica del sonido más alto y más bajo. Lo otro es deducción, pura teoría, reflexión. Como causa de la creación de sonidos y como determinante de la altura, se destaca el *movimiento* que, así se concluye, tiene que fundarse en *proporciones numéricas*. Aristóteles define el tiempo como el número, que es perceptible en el movimiento (ver p. 28 s.); y, en este preámbulo, Euclides describe los intervalos como las proporciones numéricas, que son perceptibles en el movimiento.

Esto se expone en los siguientes teoremas y sus pruebas. Trataré más detalladamente sólo de algunos. Antes de detenerme en el tercer teorema fundamental, pongo como introducción los dos primeros (sin pruebas). Aquí nos encontramos con la palabra *διαστεμα* [17], que aquí realmente significa de modo cambiante proporción numérica ***y también*** intervalo. El matemático exacto[18] se queja de que "en este modo de pensar, no se distinga claramente entre cosas diferentes. **[p. 066]** Se dice… *εpογδοον* (es decir, 9:8) y se piensa en el intervalo de tono. Los tres primeros teoremas de la *Sectio canonis* son puramente teórico-numéricos, pero en la formulación no se habla de proporciones numéricas, sino de intervalos". Pero precisamente esto es lo grandioso, que los tres teoremas puramente teórico-numéricos de la *Sectio canonis* operan con intervalos,

[8] [= 164] Euclides formula aquí, por así decir, el principio de frecuencia, pero sin definición física (algo así como, por segundo) y sobre todo, sin medir.

[9] [= 165] Yo traduciría mejor como "comprender" (einsehen); para los griegos la palabra "decir" (sagen), es igual que "comprender"

[10] [= 166] Es decir, de partes discretas, implícitamente: partes iguales, por lo tanto, unidades.

[11] [= 167] El fenómeno contar: se cuenta cuántas partículas de movimiento corresponden a un sonido, y cuántas partículas al otro – sin que todavía se incluyera lo empírico.

[12] [= 168] Sobre la proporción múltiple y la superdivisible ver arriba p. 59 ss.

[13] [= 169] Es decir, son en sí una evidencia. En los griegos el nombre, la palabra es algo real, el logos. Por el contrario, la tercera proporción (por ejemplo, 17:14) no tiene nombre, que capte en ***un*** nombre (*ενι ονοματι*) la totalidad.

[14] [= 170] "sonando-separado" "sin poner en referencia uno con otro", *διαφονως* no puede traducirse por "disonante" (como tampoco *συμφωνος* por "consonante".

[15] [= 171] *Uno* unido nace, la octava, la quinta, *κρασις*, como una mezcla íntima de dos elementos en la química.

[16] [= 172] Ver nota 169.

[17] [= 173] Ver p. 64.

[18] [= 174] B. L. van der Waerden, a. a. O. (nota 146 [2]), p.681.

es decir, con la quinta esencia de los “números-realidad”, de los “números-como-algo” (Zahlen-Etwas: número-cosificado).

1. Si una proporción numérica múltiple (intervalo) se hace dos veces consigo misma (se duplica), se crea de nuevo una proporción múltiple[19].

2. Si una proporción numérica (intervalo) se hace dos veces consigo misma (se duplica) y resulta una múltiple, entonces ella misma es múltiple.

Y ahora el tercero y fundamental teorema de música, que aquí, sin embargo, se presenta como un teorema fundamental de la teoría numérica:

3. Un intervalo superdivisible no contiene (ni uno ni varios) medios proporcionales.

o:

Entre dos números en proporción superdivisible, no puede interpolarse ningún número, que esté en la misma proporción que los dos números-extremos (Eckzahlen).

Esto quiere decir: Un intervalo superdivisible (p. e., 3:2, la quinta) no puede partirse en dos intervalos iguales[20]. Esto es válido también para todo intervalo superdivisible, por lo tanto, también para la octava, pues es un intervalo superdivisible (2:1). Pero especialmente la división de la octava es la base. La prueba se basa en el criterio de la medida común (*κοινον μετρον*), que establece las proporciones numéricas superdivisibles, [se basa] en la conmensurabilidad (ver arriba p. 59 s.).

Antes de Euclides, este teorema básico teórico-numérico y a la vez musical fue probado por el matemático Architas, amigo de Platón. Esta prueba se ha transmitido por Boecio[21], filósofo y músico-teórico de la edad media, hacia el año 500 d. d. C.

El teorema, que una proporción superdivisible no es divisible en dos proporciones iguales, es *el teorema de la creación del contar* (Zählen, conteo), y a la vez, *el teorema de la creación de la armonía*, de la representación del fenómeno-contar como real, como -sonoro (musical). Nacimiento del número y nacimiento del fenómeno musical son meramente dos caras diferentes del mismo hecho. - Este fenómeno, está expuesto en los siguientes teoremas de la *Sectio canonis*. De la primera sección puramente teórico-numérica **[p. 067]** cito solamente el pasaje, que expone la división de la relación 2:1 en 3:2 y 4:3, y, con esto, presenta la posibilidad de la serie de superdivisibles:

---

[19] [= 175] Por ejemplo 2:1 x 2:1 = 4:1; esto es claro, pero aquí está demostrado.

[20] [= 176] Quisiera aclarar esto con ayuda del álgebra: debido al teorema antes mencionado no es posible, por lo tanto, que a:b = c:d. Pero si yo, para tener dos intervalos iguales, en vez de c:d pongo también a:b, de modo que la fórmula diga a:b = a:b, y hago (compongo) estos dos intervalos iguales, entonces el resultado es a^2 / b^2. Sentado que, a/b sería un intervalo superdivisible, entonces tendría a^2 / b^2 la fórmula n+1/n, y a/b sería √ n+1/n. Esto, sin embargo, no es posible, pues una raíz es un número irracional. Aplicado a la práctica: La división de la quinta en dos partes iguales resultaría √3/2 x √3/2, estos serían intervalos irracionales. Esto puede verificarse de un modo puramente empírico. Los cuadrados de dos números sucesivos se diferencian siempre por más, que por uno. El cuadrado de 2:1 = 4:1, su diferencia es 3. O el cuadrado de 3:4 = 9:4, su diferencia es 5. Por eso no puede ser cierto, que dos números compuestos, reducidos a su raíz den por resultado números enteros.

[21] [= 177] Boetii De Institutione Musica, Libri Quinque, edidit G. Frielein, Lipsiae (Teubneri) 1857, Lib. III, II, p. 285 s. Ver tambié Boetius. Fünf Bücher über die Musik, Aus der lateinschen in die deutsche Sprache übertragen von O. Paul, Liepzig 1872, Reimpresión Hildesheim/New York 1973, p. 88 s.

- 6. La doble proporción (2:1) es el resultado de las dos siguientes proporciones superdivisibles mayores[22], a saber, de 3:2 y 4:3.

La proporión 2:1 se convierte en 3:2 y 4:3, y así sucesivamente. Y, en efecto, este contar de 1 hasta 4 – el llamado *tetraktis* de los pitagóricos[23] - surge directamente de la unidad: de la identidad de la forma 2:1, es decir, de la forma de la superdivisión.

Claramente está explicada la procedencia de la identidad-de-octava en el 9º. teorema, el último de la parte teórico-numérica: "Seis(veces) la proporción 9:8 (el tono) es mayor que la *unidad* de la proporción 2:1" (*Τα εξ επογδοα διαστηματα μειζονα εστι διαστηματος ενος διπλασιου*); y también en la siguiente prueba está expresamente fundamentada la unidad, "*εις αριθμος*"[24].

Quisiera aún tratar más detalladamente sobre el 10º. teorema, el último de la segunda sección:

- 10. La octava es un múltiple.

Este es un teorema teórico. ¿Cómo lo prueba Euclides? Aquí hace referencia a su experiencia musical, pero en general, es decir, respecto a la experiencia, de que las octavas se corresponden, de que la octava y la doble octava son el mismo sonido que el unísono (la prima) sólo que más alto y aún más alto. Él dice - pero sin partir de la cuerda - que de la duplicación del intervalo unísono-octava resulta (4:3), un intervalo que, como él sabe por propia experiencia, es dividido por un sonido en dos partes justo en la mitad. En virtud de la anterior prueba (teorema 3), de que una proporción superdivisible no puede partirse por la mitad, concluye, que la doble octava no puede ser una proporción superdivisible, sino múltiple. Y, por lo tanto, enlaza con el segundo teorema teórico-numérico ("Si la relación dupla es múltiple, también su mitad es múltiple"): "por lo tanto, también la octava es múlitple". - En otro teorema - el 12º, en el que Euclides de nuevo se refiere a una anterior prueba en la parte teórico-numérica, constata de nuevo a la vez con renovado entusiasmo, que sólo la proporción dupla (la octava 2:1) permite la división básica en quinta (3:2) y cuarta (4:3), y que esto no es válido para la proporción cuádruple (4:1); Tampoco, sirve para la triple proporción de la quinta sobre la octava, la docena (3:1). Intelectualmente o considerando el tema desde su visión - no empíricamente, es decir, desde el experimento - llega de nuevo al resultado de que: la octava es la proporción 2:1; **[p. 068]** y de que esta no es divisible en dos partes iguales, sino en quinta y en cuarta.

---

[22] [= 178] El número de las proporciones superdivisibles que aparecen es progresivamente *mayor*, el *intervalo*, más pequeño. Ver también p. 60.

[23] [= 179] Los pitagóricos sustituían en la mayoría de sus cálculos los cuatro primeros números por los números 6 8 9 12 y llegaban así por medio de la división armónica a los intervalos de octava, quinta, cuarta, por lo que el número 12 era asignado al sonido más alto, el 6 al sonido más bajo:

12:9 = 4:3
12:8 = 3:2
9:6 = 3:2
8:6 = 4:3
12:6 = 2:1

[24] [= 180] Ver también Aristóteles, ver arriba nota 144, así como Pseudo-Aristóteles Problem. 35ª -. También, informes de fuentes como "Sobre la división de cuerda" o "Acortamiento de una flauta" en las relaciones 2:1, 3:2 y 4:3 presuponen la división de la unidad (la de una cuerda o una flauta); ésta es "medida", en tanto se trate de una magnitud (Grösse), y es "contada", en tanto se trate de una medida común, es decir, en tanto se trate de una entera relación-medir (ganzzahliges Relationsmessen), de una relación-*numérica*, como resultado.

El teorema 13º[25] - en la prueba relacionada con el teorema 8º de la sección teórico-numérica - habla explícitamente en los intervalos musicales de la diferencia[26] entre quinta y cuarta, que sentimos como saltos, junto al más pequeño intervalo, que se siente como paso, al contrario de la quinta y la cuarta que sentimos como saltos, al mismo tiempo el más pequeño intervalo, que se siente como un escalón (Stufe), no como un resbalón. Y finalmente - en el teorema 16º - con el denominado semitono (*ημιτονιον*) se prueba que no nace de la "partición por la mitad" del tono entero, es decir, que el intervalo de tono (9:8) superdivisible no puede dividirse en dos partes iguales, como tampoco todos los otros intervalos superdivisibles.

Después de haber sido aplicadas a la afinación de las cuerdas (p. e., la lira) las ideas adquiridas en las secciones (teoremas 17 y 18), sigue al final la demostración en el monocordio[27]. Ahora precisamente, posteriormente, para verificar, se efectúan sobre una cuerda las divisiones anteriormente expuestas en las proporciones.

Definición empírica y física del sonido

Las relaciones sonoras se muestran sobre la longitud de cuerda en que estas son divididas respectivamente en partes iguales (2, 3, 4, 5, 6...), y estas divisiones producen las proporciones sonoras: 1:2 (octava), 2:3 (quinta), 3:4 (cuarta), 4:5 (tercera mayor), 5:6 (tercera menor); y por ulteriores divisiones: 8:9 ó 9:10 (tono), 15:16 ó 24:25 (semitono).

El fenómeno musical no conoce otra división de la longitud de cuerda como las [existentes] en las proporciones de números enteros. Esta es su frontera matemática. Así que no puede sacar raíces cuadradas o cúbicas. Esto indica, sin embargo, que el área matemática del fenómeno musical, visto ahora desde lo espacial, es *unidimensional* (Ver. también nota 180).

Es significativo, que el fenómeno de los armónicos aparece del modo más puro en la cuerda oscilante, por lo tanto, en un "cuerpo unidimensional"[28]. La cuerda oscila no solo como un todo indiviso, sino a la vez como 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/ ..., de modo que en la nota fundamental también están contenidos los sonidos producidos por las divisiones.

---

[25] [= 181] Teorema 13º "Aún hay que determinar, que el intervalo-restante de segunda (un tono) está en relación 9:8". Prueba: "Pero hemos aprendido [en efecto, en el teorema 8º] que, cuando se sustrae de la relación 3:2 la relación 4:3, queda 9:8 como resto."

[26] [= 182] Hasta la quinta y la cuarta, los griegos actuaban según el método de la división armónica, de la llamada división pitagórica (ver también p. 62 s.) para los intervalos más pequeños siguientes, para la afinación del tono y el semitono, por medio de la sustracción de un intervalo pequeño de otro mayor. Este principio de la llamada sustracción-alternativa (Wechselwegnahme), o recíproco sustraer el intervalo más pequeño del más grande, basado en la diferencia de los intervalos, un principio, que determina las matemáticas y la física hasta hoy, fue descubierto, visto *desde la música*, por los griegos (con el descubrimiento del cálculo infinitesimal por el matemático Eudoxos, discípulo de Architas). Respecto al cálculo, esto significa: "dividir" en forma de multiplicar los intervalos más grandes con las inversiones de los más pequeños: 3/2 x 3/4 = 9/8 (un tono). (Sobre la escritura - inadecuada - en "quebrados", ver nota 145). Pero Euclides llega a este resultado sin fórmula. Para los griegos, eran desconocidas las fórmulas matemáticas, tal como hoy las conocemos. Cuando los griegos practicaban las matemáticas, era para ellos una reflexión intuitiva mediante ideas aritméticas o geométricas, [es decir] el esfuerzo de contemplar (y también de comprender) lo que existe en el área de los números o en el área de las figuras. Para nosotros es difícil comprender, que estaban en condiciones de llegar tan lejos sin fórmulas. (No conocían ni siquiera los números árabes, que son también una especie de fórmulas.) Pero no voy tan lejos, para ir marcha atrás: por eso llegaron tan lejos, porque estaban destinados a comprender sin fórmulas el contexto respectivamente existente.

[27] [= 183] Ver también p. 64 y nota 158.

[28] [= 184] Agradezco a Hans Jensen † las conversaciones, que favorecieron las preguntas pertinentes.

Es un error, pensar que con esto se pruebe, que el área espacial-geométrica también sea adecuada al fenómeno sonoro. En realidad, lo que sucede es que, en una distancia, porque sólo es *de una* dimensión, aún no resalta lo opuesto, lo independiente del espacio, y de este modo se deja "maltratar", por así decir, por los números. Y: solamente en lo "unidimensional" se refleja el fenómeno sonoro, porque es tiempo-como-algo (tiempo cosificado).

A las proporciones numéricas, reflejadas sobre la longitud, corresponden recíprocamente las proporciones-numérico-oscilatorias[29]: Estas no pueden medirse directamente, (por el "oído", como la división de cuerda), ni fijarse exactamente. Pero para los antiguos se daba por supuesto, que a las relaciones sonoras se asignaban proporciones *numéricas* (y, en efecto, las encontradas en la longitud), y, en efecto, - según la mayoría de fuentes - al sonido más rápido (= "más alto") le correspondía el número más alto. (Ver Euclides, Preámbulo, arriba p. 65).

Hoy conocemos el hecho físico (frecuencias) e intentamos explicar lo evidente (yo digo así; pues de lo contrario se habla de sentir-las-consonancias), fundamentando el hecho físico, fisiológica- y psicológicamente. Que posiblemente es legítimo aspirar a hipótesis explicativas físico-fisiológico-psicológicas, no lo discuto. Pero pregunto, si no con esto se olvida lo primero, el miembro primario de la cadena: el captar intuitivamente (basado en la contemplación y no en la razón) las proporciones numéricas como realidad del tiempo. Desde luego que, como desarrollo biológico, sucede lo contrario: primero es el hecho físico (frecuencias), después el ser viviente con el órgano del oído, que entonces sólo prefiere (fisiológicamente), registra de alguna manera relaciones de frecuencia, después está el hombre, que lo trabaja, "psíquica-" o "psíco-físicamente", lo valora, acepta, lo encuentra agradable o bello, prefiere ciertas relaciones sonoras, capta intuitivamente las relaciones sonoras sencillas ("cuenta, sin saberlo": Leibniz). Esto es cierto naturalmente. Pero aquí se trata de ciencias naturales, de ciencia de la naturaleza (incluido el hombre como ser viviente). Mi pregunta, por el contrario, reza así: cómo se comporta el ser, que ahora está frente a la naturaleza (él mismo incluido, como naturaleza), cómo la contempla (sie anschaut).

El hecho (Faktum) aritmético, las relaciones numéricas son lo primario, y no la circunstancia (Gegebenheit) de la división de la cuerda o de las reacciones de frecuencias; estas se presentan, *porque* las relaciones sonoras reflejan relaciones numéricas, no al contrario[30]. Lo primario es la relación-numérica misma, que aparece *directamente* en el fenómeno sonoro, y es controlable, verificable, demostrable físico-experimentalmente por medio del "medir" empírico: como longitudes-de-cuerda o "frecuencias"[31].

---

[29] [= 185] La formulación "por unidad-de-tiempo" no es adecuada. Se trata de *proporciones*-numérico-oscilatorias; no es necesario, por lo tanto, ninguna añadidura. 3:2 indica, que un sonido produce 3 vibraciones, en el tiempo, que el otro produce dos.
Pero es indiferente, si indica la relación del sonido más alto frente al más bajo con 3:2 ó 2:3, en ningún caso hay que aplicar estos números a las longitudes. Pues la longitud nada tiene que ver directamente con el sonido. La proporción 3:2 ó 2:3, como sonido, *sólo tiene que ver directamente con el tiempo*. 3:2 = relación de las vibraciones en el mismo tiempo, 2:3 relación de la duración de cada vibración. Y ahora: esta duración más corta corresponde a la longitud-de-cuerda más corta (cuanto más corta es la cuerda, más rápidamente vibra).

[30] [= 186] Así es el fenómeno de la correspondencia-de-octava, que, con la nota *c* (do), retorna, se repite la "cualidad-de-*C*", incluida en la naturaleza-numérica: el hecho de que la cuerda-*C* (Do) (= "1") pueda dividirse en dos partes iguales entre sí (= 1/2+1/2), cuando, por el contrario, todas las otras divisiones producen partes desiguales (2/3+1/3, 3/4+1/4, 3/5+2/5 etc.).

[31] [= 187] Esto lo complementa el hecho de que, en las proporciones, de un modo diferente a en los quebrados, nada cambia con la inversión (ver nota 145): p. e., 3:4 es lo mismo que 4:3 (por el contrario, [en los quebrados:] 3/4 no es lo mismo que 4/3). (Ver también Aristóteles, física 220a18: "así como 2:1 y 1:2

Ahora, en el fenómeno sonoro, me ocupo directamente de las numéricas "en sí"; y no de las proporciones numéricas referidas a "cosas" (lo espacial). Las proporciones numéricas **[p. 70]** son aquí el "algo" (Etwas) constituyente. Este "tiempo-algo" (Zeit-Etwas) es un algo real, por lo tanto, tiene que, mediante (pero sólo mediante; que no es idéntico a con) sensaciones, ser experimentable para el hombre (si nó sería algo místico, fantasioso). Así llega a ser perceptible mediante el oír (ver p. 55): como resonar (Erklingen). Y *para esto* son "necesarias" las vibraciones. Aquí el *hecho* es lo esencial (Faktum: realidad): que el hombre, ahora, tiene la posibilidad de captar intuitivamente mediante el "ser-percibido" proporciones-numéricas simples. Y que él (por eso se trata aquí de un *Faktum*) sobre este fenómeno, el fenómeno sonoro (musical), llega *al asombro.* - Por qué esto (captar intuitivamente las proporciones *proporciones*-numéricas) y no lo acústico (el oír) es lo constitutivo del fenómeno sonoro, se apoya en que el fenómeno-sonoro no depende de la sensación, es decir, de lo espacial (ver p. 54 s.).

El "órgano-sensorial" para el fenómeno-sonoro es obviamente un "órgano-para-contar-relaciones"[32]: [pues] *cuenta*. Este "cuenta" la *relación* de las frecuencias, de las velocidades, la *relación* de "movimientos", pero, por lo tanto, "movimiento", que sin embargo, como relación sólo presta un servicio de peón: lo perceptible *pura proporción*-numérica, *con ayuda* del fenómeno-espacio-movimiento accesible para la sensualidad. Lo absoluto y el espacio están descartados.

En el área de la teoría de las proporciones-numéricas, teoría-de-los-números, por lo tanto, es posible, incluir el tramo (distancia) como ilustración (visualización); las relaciones-numéricas reales pueden ser representadas como unidimensionales. Esta visualización (ejemplificación) por medio de lo geométrico - para los griegos estaba en juego quizá también "la alegría por lo visual"[33] - es lo que llevó a la idea errónea, de que la geometría (y no la aritmética) era el substrato matemático de la armonía, del fenómeno sonoro. Esta surgió, porque las relaciones-numéricas pueden proyectarse de un modo unidimensional, la distancia (trayecto), por lo tanto, *se puede* incluir en la visualización, y porque los griegos establecieron la regla partiendo de ese "*se puede*"[34].

Las relaciones-numéricas son las que motivan los enlaces (Einhaken)[35], porque no hay otra razón por la que se "enlaza", ni puede haberla. Es el "enlazar" de las *mismas proporciones-numéricas*. Y esto se presenta también en las proporciones de longitud- o

---

es el mismo intervalo (es decir, la misma relación numérica)". Que aquí *διαστημα* significa a la vez "intervalo", puede suponerse por los pasajes anteriores 194a26-29 y 195a31, donde la octava era nombrada como encarnación de la proporción 2:1.) Existe, por lo tanto, la misma proporción si tomo por base la velocidad (p. e., 4:3) o la longitud de cuerda (p. e., 3:4). Significativamente, en las fuentes griegas, titubea la coordinación, pero la mayoría de las veces se asigna al sonido más alto el número mayor, p. e., Architas (VS (nota 106), 47 B 1): "Que ahora, por lo tanto, los sonidos altos se muevan más rápidos, los bajos más lentos, nos viene a resultar claro por los muchos ejemplos"; ver también B. L. van der Waerden, a. a. O. (nota 146 [1], p. 173, como también 192 ss. (recopilación de las correspondientes fuentes de texto). - Como, por lo tanto, en el fenómeno sonoro, el portador-de-la-sensación no crea el elemento constitutivo, así también, en el fenómeno sonoro como relación-numérica, tampoco la manera de percibir (velocidad de movimiento o de cuerda), sino la *relación de los números como tal*.

[32] [=188] En esto se basa el denominado "oír interior": Yo llevo la relación-numérica de quinta dentro de mí y mediante mi seguridad interior, que "es verdad", sin ayuda de instrumentos como el compás o la regla, en las figuras geométricas, la creo exactamente. Mediante el "encuentro" (Treffen) la fijo, la hago explícita, oíble y de este modo también comunicable. Lo que "es verdad" (stimmt) es la coincidencia del fenómeno que tiene lugar fuera de mí, con el contenido dentro "de mí". Obviamente, lo común no es "la sensación" por la que lo percibo, pues ella tampoco está "dentro de mí".

[33] [= 189] B. L. van der Waerden a. a. O. (nota 46 [3]), p. 204.

[34] [= 190] B. L. van der Waerden a. a. O. (nota 46 [1]), p. 165. "Sólo después de 300 [años], los "canónicos" (a saber, de los pitagóricos) han confirmado experimentalmente mediante medidas en el monocordio los fundamentos de la teoría musical pitagórica."

[35] [= 191] Ver p. 26 y 57 así como p. 58.

de movimiento- (frecuencia-), como *consecuencia* de las proporciones-numéricas, pues estas son evidentes, estas son la "razón"; no se trata de resultados-de-medida empírico-"casuales"[36].

Partiendo de una altura (Tonhöhe) dada se cuentan los grados (Stufe): 1., 2., 3., 4., grado y 5., 6., 7., 8., grado. El "alma que cuenta" (die "zählende Seele") constata, que un intervalo de grado, dentro de las series de 1.-4. y 5.-8 grados, es respectivamente más pequeño, y, en efecto, en el mismo sitio dentro de ambas secciones-de-4-grados (p. e., 3./4. y 7./8.). **[p. 071]** Cada grado corresponde a una cuerda (chorde) afinada según las "enlazantes" relaciones sonoras. De ahí se llama la estructura-de-cuatro-grados (notas) "tetracordo". El "alma" constata además una coincidencia del 8º grado con el 1º, de modo que la serie de grados se repite, empezando respectivamente de nuevo en cada 8º grado.

Lo evidente, lo "enlazante" (lo que motiva los enlaces), es el establecimiento (das Sich-Einstellen) de la medida común. Esta salta en el espacio: Mientras yo, dirigido por la relación perceptible, encuentro el punto en la cuerda, mediante el cual se produce la quinta, divido la longitud según la relación 3:2; por lo tanto, no por mediación de un espacio-medida o de una construcción geométrica, sino directamente mediante la relación perceptible. Análogamente, esto es válido para las relaciones-de-frecuencia. Por eso, no es adecuado formular: La relación 3:2 "reproduce" la relación de frecuencias o de longitudes. El teorema debe decir: La proporción de frecuencias o de longitudes "reproduce" la medida común, que se crea como relación-numérica 3:2.

Se corresponden entre sí: lo evidente y lo evidente: el fenómeno sonoro y la relación-numérica; no el fenómeno sonoro y lo visual. Porque lo visual (el trayecto dividido) no es lo evidente por sí directamente, sino la relación-numérica. Lo visual (la cuerda y sus trozos parciales) es meramente el portador sobre el que se encuentran relaciones-sonoras y relaciones-numéricas, el "material de contacto", por el cual se manifiestan las evidentes relaciones-sonoras como relaciones-numéricas. Lo primario evidente es: "Como los números (respecto al uno), así los sonidos (respecto a lo originalmente dado, = sonido más grave)" y no "como las partes de un trayecto (respecto a todo el trayecto), así los sonidos respecto al sonido dado". Fenómeno sonoro y trayecto-dividido (lo visual o lo geométrico) son, en el fondo, incomparables, porque son heterogéneos, pertenecen a distintas categorías, están "*yuxta*puestos", se excluyen mutuamente. Pero, el fenómeno sonoro y los números no: Los números aparecen aquí como una abstracción del fenómeno sonoro, son de un orden *superior* a él[37].

El fenómeno sonoro origina, puesto que está constituido como fenómeno sonoro, proporciones-numéricas *discretas*[38], y, en efecto, "automáticamente" mediante enlaces,

---

[36] [= 192] Piénsese sólo en el primado de lo pensado (sabido) antes de los intervalos empíricamente reales. (Ver p. 25 s.; ver además nota 139).

[37] [= 193] Ilustrativo es el mito de Pitágoras contado en el Enchiridion de Nicómaco (Jan, MSG (nota 157), p. 245 s.): "En el área de la vista: compás y regla (La geometría). En el área de la háptica (tacto) la masa (presupone la congruencia, lo continuo). Y ahora también buscar lo equivalente en el área de lo oíble: De esto se ocupaba Pitágoras, cuando pasó junto a una fragua y oyó los diferentes sonidos. Experimentaba y se maravillaba de que, en todos los experimentos, bien fuera en hilos colgantes con pesos, bien en el monocordio, aulos, sinrix, etc. "en todas partes encontraba lo mismo inconfundiblemente: el número" Números absolutamente: no por ejemplo ***o*** (*entweder*) longitudes, ***o*** (*oder*) pesos, ***o*** (*oder*) diámetro, ***o*** (*oder*) vibraciones, sino números, que son la base de todas estas físicas maneras-de-definir. En lo cual, Pitágoras, - es decir, Nicómaco - se equivoca en los pesos: naturalmente no se comporta t (Tonhöhe: altura de sonido) como g (Gewicht: peso), sino como g^2, pero precisamente esto es indicativo. Nicómacos, es decir, Pitágoras no llega al fenómeno físico, sino a la correspondencia de relaciones-sonoras y relaciones-numéricas, así también van der Waerden, a. a. O. nota 146 [1], p. 173 y 175; id. p. 170 ss. una compilación de diferentes tradiciones sobre "experiencia, teoría y experimento" en los pitagóricos.

[38] [= 194] Ver p. 27.

evidencias. Son discretos porque entremedias no hay "nada",[39] es decir, nada, que enlaza, que evidencia. Y estas proporciones-sonoras enlazantes, "evidentes" (los "intervalos") se complementan; esto es percibido ya sólo como fenómeno sonoro, sin añadidos de proporciones-numéricas. Así, por ejemplo, quinta + cuarta dan por resultado la octava. Y ahora se manifiestan como proporciones-*numéricas* (mediante el "material-de-contacto, de la cuerda tensa), se corresponden con las igualmente "evidentes" - proporciones-numéricas. Estas visualizan automáticamente el principio-armonía (las reglas de armonía). y este puede demostrarse aritméticamente - ver los teoremas de la *Sectio canonis* -.

[p. 072] Este sistema, la armonía, aparece para el hombre, en principio, en el área del sonido como evidente "por naturaleza" (naturhaft), como hecho (Faktum), en el que se encuentra el fenómeno de "contar" (Zählen) como algo *real* y no como compresibilidad abstraída, como en aritmética, o también en el ingenuo contar (conteo, suma).

Inconmensurabilidad

En último lugar, hablaba del área de lo visual o geométrica como de una categoría completamente diferente frente al área de la armonía. Quisiera fundamentar esto con más precisión: El área de la geometría primariamente nada tiene que ver con las relaciones-de números-enteros; al comparar magnitudes (Grösse), no son números lo primario en el trabajo. Para visualizar directa y originalmente - y por eso nos asombra - lo totalmente heterogéneo de esta área frente a la armonía, recurro a dos ejemplos, dos antiguas pruebas de teorema de Pitágoras.

- 1. El teorema de Pitágoras llega a ser evidente mediante la confrontación de las dos figuras siguientes:

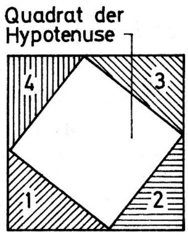


Fig. 1

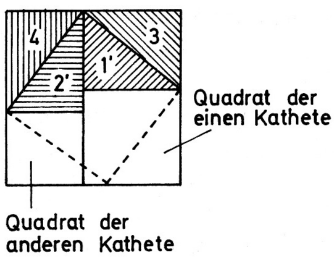


Fig. 2

La figura 1 Está formada por el triángulo recto dado (rayado 1), el cuadrado de su hipotenusa (no rayado) y las repeticiones del triángulo en los tres lados del cuadrado de la hipotenusa (rayado 2, 3, 4). En la figura 2 han sido cambiados de sitio los triángulos 1 y 2: 1' y 2'. Lo que ahora aparece no rayado, son los cuadrados de los dos catetos. Es evidente, es *visible*, que el ámbito (Umfang) de estos dos cuadrados tomados en conjunto tiene que ser igual al del cuadrado de la hipotenusa (fig. 1 sin rayar). **[p. 073]** Los dos grandes cuadrados, fig. 1 y 2, son congruentes. Ambos están cubiertos respectivamente por 4 triángulos congruentes (rayados) + una restante superficie (no rayada)

[39] [= 195] Ver p. 28, nota 25, p.42, 46 y nota 80.

respectivamente (cuadrado de la hipotenusa o cuadrado de los dos catetos). Es evidente que la superficie no rayada restante de la fig. 1 (el cuadrado de la hipotenusa) tiene que tener el mismo ámbito que el de la figura 2 (cuadrado de los dos catetos). Esto se "prueba" mediante la contemplación geométrica directa. Aquí, esta corresponde al hecho (Faktum) del "coincidir" (del cubrirse), de la congruencia: los dos grandes cuadrados y los 4 respectivos triángulos son congruentes (deckungsgleich). Por lo tanto, el resto es igual[40]: el cuadrado de la hipotenusa es igual al cuadrado de los dos catetos[41]. Es una prueba evidente, fundada directamente en una concepción geométrica[42]. Pues, entre las superficies rayadas y no rayadas no se puede haber camuflado (eingeschmuggelt) ninguna otra superficie. Pues tienen de hecho fronteras comunes; *tienen* (müssen) que tener fronteras comunes. Entremedias no puede haber nada. Lo evidente (Einleuchtende) se funda en el *hecho* (Faktum) de lo visual-espacial. Se postula lo constante, lo continuo del espacio (de la extensión), por lo tanto, de las fronteras comunes[43]. El momento (factor) específico de esta evidencia es de naturaleza espacial. Ese "afuera" directamente visible "nos salta a la vista" - pero sigue siendo un "afuera". Pero no se deja contar (Zählen). Es un "afuera", que, como apariencia, a la vez, hace directamente obvio para el *nous* una propiedad inmanente en él. Lo evidente se encuentra en la *misma* apariencia[44].

- 2. Si el anterior ejemplo visualizó (ejemplificó) por sí la evidencia genuinamente espacial, así el siguiente ejemplo, que presupone el teorema de Pitágoras, hace explícita fundamentalmente la diferente naturaleza del número en sí y de lo espacial[45]: la prueba de Euclides, de que diagonal y lado de un cuadrado no pueden tener medida común, que,

---

[40] [= 196] εφαρμοζειν. Ver Euclides, Elementos, I, 4, Axioma: "Lo que es congruente (sich deckt) es igual".

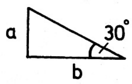
[41] [= 197] Ver Euclides, Elementos, I, 3, Axioma: "Si lo igual se resta de lo igual, los restantes son iguales".

[42] [= 198] Se trata de la denominada "Figur des Seiles" (Figura del cable?), como se describe - para el caso especial del triángulo de tres lados 3, 4, 5 - en un antiguo calendario chino; "pero la reflexión vale aparentemente, en general, para triángulos rectangulares tanto racionales como irracionales, esta expone una "prueba de descomposición" (Zerlegungsbeweis) muy general del teorema de Pitágoras". (O. Becker, a. a. O. (nota 146 [3], p. 56; id. a. a. O. (nota 146 [2], p. 20.) Una "prueba de descomposición" (Zerlegungsbeweis) existe también en Euclides, Elementos I, 47.

[43] [= 199] Ver p. 34, p. 37, p. 48 y 53, como también la nota 34.

[44] [= 200]Sobre la demostración de la prueba por medio de una visión geométrica, como adecuada y permitida, también en la posterior geometría no-euclidiana, ver p. e., R. Courant y H. Robbins. Was ist Mathematik? 2ª edición, Berlín/Heidelberg/New York 1967, p. 180 s.

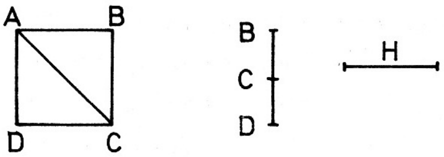
[45] [= 201] Con esto no hay que confundir, que, cuando se asigna al ***uno*** y, por consiguiente, al número una magnitud espacial, las relaciones numéricas (Zahlenbeziehungen) son representables como relaciones de magnitud (Grössebeziehungen) (espaciales), y también que ciertas "espacio-circunstancias" son traducibles a proporciones-numéricas, p. e.



a : b = 1 : 2

En un caso semejante el hecho (Sachverhalt) no consiste en la relación-*numérica* en sí, sino en que la magnitud espacial ***b*** - si el ángulo entre ***b*** y la hipotenusa = 30º - es el doble de grande que la magnitud espacial ***a***, que ellas, por lo tanto, se comportan como 1:2. (Que esta circunstancia no muestra ninguna naturaleza-numérica - sino que, por así decir, puede ser asignada casualmente a la relación-de-números-enteros, se hace claro en los ángulos, que excluyen la posibilidad de una traducción a relaciones-numéricas) O: en los triángulos isósceles rectangulares, el cuadrado de la hipotenusa es dos veces mayor que el de un cateto (porque en este caso los dos cuadrados-de-cateto son igual de grandes; cada uno tiene, por lo tanto, la mitad del cuadrado de la hipotenusa como ámbito). O: el diámetro de la circunferencia es dos veces mayor que el radio.

por lo tanto, son magnitudes inconmensurables. Pongo el texto de la prueba, que aparece[46] en el apéndice 27 del Libro X de los Elementos, según la traducción de K. von Fritz[47]:



ABCD es un cuadrado y *AC* su diagonal. Pienso que las distancias *AC* y *AB* son inconmensurables.

Admitimos, pues, que son inconmensurables. Pienso, que de aquí resulta, que el mismo número es a la vez par e impar. Es obvio, que el cuadrado de *AC* es el doble de grande que el cuadrado de *AB*. Puesto que, por lo tanto, (según nuestra suposición) *AC* y *AB* son inconmensurables, *AC* está, respecto a *AB,* en relación de un número entero frente a un número entero. **[p. 074]** Estos deben tener la relación *DE*:*F*, y *DE* [=RE] y *F* [=FA] deben ser los números más pequeños, que están en esa relación de uno a otro. *DE* [=RE] no puede ser, por lo tanto, la unidad. Pues si *DE* fuere la unidad, y está frente a *F* en la misma relación, que *AC* con *AB,* entonces, puesto que *AC* es mayor que *AB*, será mayor la unidad *DE,* que el número entero *F*, lo que es imposible. Por esto *DE* no es la unidad, sino un número entero (mayor que la unidad). Puesto que *AC:AB* es = *DE:F*, hay que concluir, que también $AC^2:AB^2$ es = $DE^2:F^2$. Pero AC^2 es = $2AB^2$, por eso DE^2 es = $2F^2$. DE^2 es, por lo tanto, un número par, y *DE* tiene que ser por esto también un número par. Porque si fuere un número impar, su cuadrado sería también un número impar. Porque, si se añade una cantidad de números impares, de modo que la suma de números añadidos es un número impar, entonces el resultado es también un número impar. *DE*, por lo tanto, es un numero par. *DE* debe ser dividido entonces, en el punto *G,* en dos partes iguales. Puesto que *DE* y *F* son los números más pequeños que están mutuamente en la misma relación, son [números] primos. Puesto que ahora *DE* es = *2EG*, hay que concluir, que ED^2 es = $4EG^2$. Pero ED^2 es = $2F^2$, por lo tanto, F^2 es = $2EG^2$. Por esto, F^2 tiene que ser un número par y por consiguiente *F* también tiene que ser un número par. Pero también está demostrado, que *F* debe ser un número impar, lo que es imposible. De aquí hay que concluir, que *AC* y *AB* son inconmensurables, lo que estaba por demostrar (was zu beweisen war: *"quod erat demostrandum"*).

Euclides prueba, por lo tanto, - y, en efecto, aritméticamente, presuponiendo los teoremas teórico-numéricos de los Elementos, y esto es lo maravilloso[48] -, que la proporción de magnitudes entre la diagonal y el lado de un cuadrado no puede ser asignada a ninguna relación numérica, de modo que *no es una relación numérica*, pues no tiene nada que ver con el número, no puede, por tanto, ser captada por el número, de modo que no muestra, por lo tanto, una naturaleza (índole) propia suya, una naturaleza, que no está sujeta al principio-de-conteo (Zählprinzip) y, por lo tanto, tampoco a la

---

[46] [= 202] Este apéndice no está en la traducción de los Elementos de T. L. Heath (inglés, 1908, 2ª edición, 1936), como tampoco en la traducción alemana de Th. Peters. Por el contrario, aparece en la edición alemana de los Elementos de C. Thaer.

[47] [= 203] K. v. Fritz, a. a. O. (nota 146 [2]), p. 291 s., nota 60. Ver también la reproducción resumida de la prueba por B. L. van der Waerden, a. a. O. (nota 146 [3]), en la que sin embargo, por así decir, falta el punto (remate), porque al principio se ha omitido el magnífico pasaje: *των αυτον αριθμον αρτιον ειναι και περισσον,* la premisa, imposible de evidenciarse al final, de que en la suposición de inconmensurabilidad ese número tenía que ser a la vez par e impar; van der Waerden sólo llega aquí hasta el resultado "inconmensurable". Ver también las libres reproducciones de esta demostración de O. Becker, a. a. O. (nota 146 [2], p. 41 e id., a. a. O. (nota 146 [3] p. 51. El texto griego está tomado de los Elementos de Euclides, vol. III, Liber X cvm Appendice post I. L. Heiberg, edición E. S. Stamatis, Leipzig (Teubner) 1972, p. 231 ss.

(Nota del editor) Georgiades había anotado en el manuscrito, en este sitio, haber seguido la prueba según una propia traducción. Pero no la ha dejado escrita.

[48] [204] Además con esta prueba, la raíz cuadrada de 2 parece ser la primera raíz, cuya irracionabilidad fue demostrada aritméticamente (ver O. Becker, a, a, O. (nota 146 [3], p. 51). Se podría decir, que es la hora del nacimiento de las matemáticas como ciencia que abarca lo particular (de lo irracional). - Para datación ver también B. L. van der Waerden, a. a. O. (nota 146 [2]), p. 203-54, especialmente p. 228 s.: "Hacia el año 450 a. d. C., pero en cualquier caso antes del año 420 a. d. C. se realizó la prueba de irracionalidad de la raíz de 2 sobre la base de la teoría de Pitágoras sobre par e impar."

exigencia de una medida común. El hecho, este cuadrado ahí, con esta diagonal ahí, con ese lado ahí, es irrefutablemente evidente; está claramente ahí. el triángulo rectangular isósceles formado por dos lados y la diagonal está fijado inalterablemente. La magnitud del lado y de la diagonal están claramente definidos en esta figura como tramos (distancias); lo vemos: son líneas rectas limitadas inequívocamente por medio de puntos de intersección. Y su relación (*d:s*) [diagonal:lado] es definida por el teorema pitagórico: la superficie de un cuadrado con la longitud de lado ***d*** [diagonal] es el doble de grande que la del cuadrado con la longitud de lado ***s*** [lado] (por lo tanto, del cuadrado dado). Pero si quisiéramos captar su relación como relación numérica, entonces tendría que ser un mismo número, al mismo tiempo, par e impar. El número falla[49].

¿Por qué? El número surge como relación del contar (conteo) según el principio de la medida común, del uno. Pero una realidad geométrica se basa en el principio de lo espacial, de lo constante, de la extensión: esta es definida como un "afuera". En el mencionado ejemplo, **[p. 075]** lo primariamente dado es la figura y sus componentes, el lado y la diagonal. Estos tramos reciben su calidad del espacio soberano como lo primordial, por consiguiente, la relación-de-magnitud concretada inconfundiblemente por la figura que la define, es también genuinamente de naturaleza espacial. ¿Por qué tienen que obedecer a otra instancia igual de soberana, pero heterogénea al espacio; a la relación como número? Si se basa la evidencia propia de los números en el uno, como genuina medida, así también se basa la evidencia propia de las magnitudes geométricas en que son definidas evidentemente por fronteras comunes con un espacio continuo, sin huecos - el tramo dentro de la recta sin límite, la figura dentro de la superficie, el cuerpo dentro del espacio. Pero tales límites no tienen que provenir del uso de una medida común cualquiera; estos definen directamente la magnitud-del-espacio, al delimitar meramente lo espacial. Las magnitudes espaciales pueden, en efecto, mostrar también una medida común (ver también, nota 201), pero no es necesario. el campo de lo inconmensurable está abierto a ella. Lo inconmensurable - ajeno a los números[50] - brota de las relaciones de magnitudes-espaciales (como en el anterior ejemplo la relación de d:s [diagonal : lado]. Visto desde el número, es irracional, es decir, no es Logos, no es λογος αριθμων, no es número-logos. Pero como relación-de-magnitud visible de genuina realidad espacial (ver ejemplo citado) es un logos, pero λογος μεγεθων, un logos-de-magnitudes (Euclides)[51].

La prueba de Euclides atribuye lo geométrico (por lo tanto, el espacio) al "tiempo": Este capta el hecho (Faktum) d:s como (por) "tiempo", mientras prueba, que el número y, por consiguiente, como nos ha enseñado Aristóteles, el tiempo no es apto para captar la realidad (Faktum) genuinamente espacial. Él prueba, que la estructura-tiempo-número y la estructura-espacio (continuo) son dos hechos fundamentalmente

[49] [= 205] "A semejante prueba alude también Aristóteles (Analytica Prior. I, 23 p. 41 a, 26-27)". (O Becker, a. a. O. (nota 146 [3], p 51; ver también, B. L. van der Waerden, Die Arithmetik der Pytagoreer, a. a. O. (nota 146 [2], p. 228: "A esta prueba alude Aristóteles reiteradas veces" con nota 39: Heiberg Mathematisches zu Aristoteles, p. 24".

[50] [206] Bajo "números" y "relaciones-numéricas" han de entenderse siempre los números *enteros* y sus relaciones. (Ver también, p. 30 y p. 46) Para los griegos, la formulación "*αριθμος ασσυμμετρος"* sería una contraditio in adjecto. Pues, *αριθμος* implica la medida común. - Para los números irracionales ver también p. 30 s. (Corte de Dedekind); estos no son números genuinos, originales que surgen del conteo (Zählen).

[51] [= 207] Ver p. 30. El *λογος μεγεθων* no parece ser un *Logos* genuino, original, como el logos-armonía. El origen de la geometría no es, en cierto sentido, como la armonía-logos es el origen de la aritmética. Es más bien fruto de una característica primaria de lo continuo. No es un "postulado" sino una posibilidad demostrable, que aparece en figuras geométricas. El armonía-logos y el *ασυμμετρος "λογος" μεγεθων* no han de contemplarse como principios equivalentes.

diferentes. - Esto piensa en el fondo también Aristóteles, cuando dice, que el hecho (Faktum) ***d:s*** es independiente del tiempo: *αει εστι*, Física 222a5.[52]

Una quinta es comprensible (einsehbar), evidente, *nominable* "con *un* nombre", *ενι ονοματι*[53], sobre la base de la medida común (*συμμετρον*), de la conmensurabilidad, como la proporción-numérica ***3:2***, este es su *nombre*, su logos (*λογος*). Por el contrario, la proporción del lado-del-cuadrado frente a la diagonal-del-cuadrado, contemplada como número, es incomprensible (uneinsehbar), no evidente, es inconmensurable (*ασυμμετρον*), un número irracional[54], como proporción-de-número-entero innominable (*αλογος*), inexpresable (*αρρητος*[55]), inefable (*ineffabilis*[56]). "Pongamos juntos sólo dos tramos cuadriculados conmensurables, entonces el todo es irracional; se llamaría binominal ("la con dos nombres")"[57]. Ambos tramos, porque son inconmensurables, **[p. 076]** permanecen también compuestos sendos como un absoluto, son como un "todo" *αλογος*, no reducibles a un nombre: cada uno de ellos es denominado, son necesarios *dos nombres*, *δυο ονοματα*[58].

He contrapuesto el hecho (Faktum) geométrico al fenómeno-número-tiempo. Violenta directamente la capacidad del espíritu humano, que estos dos hechos (Fakten) sean posibles juntos: El hecho (Faktum) de las relaciones-numéricas *sonoras* y el de las figuras "*mudas*".

El fenómeno-básico humano del número se encuentra en la armonía. Esta desvela el principio *interior* del número, la relación-numérica, lo real *sub specie* de proporciones-de-números-enteros, de conmensurabilidad, de super-divisibilidad, del conteo (des Zählens). Y esta realidad es la *realidad sub specie del tiempo*.

El *tertium comparationis* entre tiempo y número es que ambos no tienen magnitud, es que no tienen lugar ni extensión. Análogamente a la definición de

---

[52] [= 208] Pues *αιει εστι* = "independiente del tiempo, en 221b3 s., se dice: *τα αιει οντα, η αιει οντα, ουκ εστιν εν χρονω*. Lo contrario a esto: 221b23-25 *ουδε το μη ον εσται παν εν χρονω, οιον οσα με ενδεχεται αλλως, ωσπερ το την διαμετρον ειναι τη πλευρα συμμετρον*: es decir, lo que de por sí no existe, tampoco está en el tiempo (es decir, es independiente del tiempo). Y 222a4-7 ambos mutuamente enfrentados + resumen: ... οσων ταντικειμενα αιει εστιν ... - por lo tanto, ni el *ασυμμετρον* ***d:s*** ni el *συμμετρον* ***d:s*** están en el tiempo ... *διο αιει ουκ εστιν, οτι εναντιον τω αιει οντι*. Esto recuerda al *εξ αναγκης* (las realidades geométricas) en el Timeo de Platón: no dependen del *nous*, no *δια νου*. Son un algo apropiado al *nous* (ver abajo p. 127). En efecto, la sucesión es también apremiante en el conteo (Zählen), por lo tanto, si se quiere, obedeciendo a la *αναγκη*; pero esto apremiante aparece *dentro de la actividad* del nous. Por el contrario, lo apremiante de lo geométrico, de lo continuo (Lückenlose), de la congruencia, aparece en la *misma cosa*, le subsiste.

[53] [= 209] Ver *Sectio canonis*, Preámbulo p. 65, nota 169 y 172.

[54] [= 210] [= 210] Ver Euclides, Elementos X, Teorema 7: "Las magnitudes inconmensurables no tienen relación alguna como un número frente a otro número" *Τα ασσυμμετρα μεγεθη προς αλληλα λογον ουκ εχει, ον αριθμος προς αριημον*. - Ver también la distinción de Euclides entre un número-*λογος* y una magnitud-*λογος* (*λογος αριημων - λογος μεγεθων*) p. 30 y nota 207.

[55] [= 211] La clasificación histórico-terminológica del par de conceptos *ρητος-αρρητος* (explicitable - inexplicitable en la aplicación "racional-irracional" de los números), ver K. v. Fritz a. a. O. (nota 146 [2]), p. 302.

[56] [= 112] Joh. Kepler usa la expresión "ineffabilis" en lugar de "irracional", que rechaza expresamente como interpretación latina de *αλογος*. Ver Johannes Kepler, Weltharmonik, Traducción e introducción de Max Caspar, Múnich/Berlín 1939, p. 21 s. (I. Libro, XII.-XV. Definición) así como en la introducción de Caspar, p. 38* s.

[57] [= 213] Euclides, Elementos X, Teorema 36: *Εαν δυο ρηται δυναμει μονον συμμετροι συντεθωσιν η ολη αλογος εστιν, καλεισθω δε εκ δυο ονοματων*.

[58] [214] Aquí se ve, que en *αλογος* también resuena el significado de "ανωνυμος", más exactamente: "ανωνομαστος" (= ineffabilis; ver nota 212), y, por consiguiente, "anónimo": La totalidad de los dos tramos juntos ((AB)+(BC) = (AC) es *αλογος* y a, la vez, no nombrable (con ***un*** nombre); se descompone en dos "nombres" AB y BC.

Aristóteles, el tiempo es el número (del movimiento ...)" yo digo: el tiempo-realidad es el número como armonía.

El número de la armonía es el *número puro* (die reine Zahl) precisamente porque no conoce magnitud, lugar y extensión, ni resultado-de-medida. Pero tampoco es el número abstraído de la aritmética. Porque está unido al tiempo, es producto del tiempo, contiene tiempo. Sólo sobre la armonía abstraída matemáticamente surge la teoría-numérica apriorística, la aritmética, que puede prescindir de la distinción *αριθμητοω - ω* αριθμουμεν[59], y, establecido como base el concepto general αριθμος, abstraído de ambos, opera sólo con él.

Prescindo en el tiempo-como-algo (Zeit-Etwas: tiempo-cosificado) del *tiempo*-momento (*Zeit*-Moment: tiempo-instante) y fijo mi atención en las relaciones como tales, entonces sólo quedan las relaciones-*numéricas*: una *abstracción*, que no tiene nada que ver con tiempo, sino precisamente sólo con el número: la *aritmética*. O bien: si quito de la formulación "relación-sonora" (Tonrelation), explícito nombre para indicar "*sonar*" (Tönen) quito el elemento-verbal "sonora" (Ton), quito el *tiempo*; lo que queda es la aislada, abstracta relación-*numérica*, que es inherente al sonar (Tönen), pero ya no tiene nada más que ver con *sonar* (Tönen) ni, por consiguiente, con *tiempo*.

Pero el número, en efecto, es constitutivo tanto para el fenómeno-sonoro como para el tiempo absolutamente; pero él mismo puede existir también sin tiempo: en aritmética.

Los pitagóricos todavía no explicitaron, que en armonía existe una específica unión con la estructura del tiempo. Por esto, creían que el número era lo *real* por antonomasia, es decir, también cuando se manifiesta como espacial[60]. Y, por eso, quedaron perplejos, **[p. 077]** cuando descubrieron la inconmensurabilidad, es decir, la autonomía (Eigengesetzlichkeit) de lo espacial. No comprendían que aquí se enfrentan mutuamente lo real como armonía (es decir, la estructura-temporal) y lo real como espacial; no comprendían, que el descubrimiento de la inconmensurabilidad les abría los ojos para captar la realidad desde ambos lados (tiempo y espacio).

La grandeza de los pitagóricos es haber captado el modelo-*"naturalista"* ("Natur"-Vorbild) de la medida común, el fenómeno sonoro y, de este modo, haber fundado su teoría *aritmética* de las proporciones, el principio-logos aritmético como algo *real*: como el logos *perceptible en el fenómeno-sonoro*. Pero sólo con ayuda de Aristóteles puede decirse: este resonar (erklingen) de relaciones es *tiempo*. Aristóteles no efectúa el escrito sobre tiempo-cosificado (Zeit-Etwas) (este pertenece al "capítulo del tiempo" de su Física no en su contexto; pero lo extraño es, que tampoco lo hace en ninguna otra parte)[61].

---

[59] [= 215] Ver p. 28 y 33.

[60] [= 216] A este error (ver la crítica de Aristóteles a los pitagóricos, ver p. 30 y nota 27 como también nota 153) se remontan las denominadas teorías armónicas: Se pretende reencontrar las leyes numéricas, que definen la armonía, en la naturaleza (en cristales, plantas, seres vivientes) y en el arte, especialmente en la arquitectura. Lo geométrico (como p. e., la sección aurea, que produce relaciones-numéricas irracionales y nada tiene que ver con la armonía, ver nota 149) se mezcla con lo aritmético. Además de a Pitágoras, ésta corriente remite a Kepler, que asimismo no distingue estrictamente las dos áreas de tiempo y espacio. Esto no daña la grandeza de Kepler, que está en otra parte.

[61] [= 217] Para Aristóteles el uno (+número) como ente-sin-lugar (Wesen ohne Position) (ver nota 25) no es el área-del-fenómeno-sonoro, el área-de-la-armonía, porque para él armonía es una *aplicación* de la *αριθμητικη μουσικη*; ver Anal. post. 87a34: "La aritmética (a saber, como ciencia más exacta, porque tiene un objeto no-material) merece la preferencia frente a la armonía (a saber, que tiene un objeto material, a saber, el fenómeno sonoro)."

El único texto más largo conservado de Aristóteles, en el que trata de armonía, es el Fragmento 47, trasmitido en Plutarco, De musica cap. 23, en el que en la exposición de la división armónica de la octava se une a la tradición pitagórica. Los pasajes restantes nombran a la armonía como relación (*λογος*) de números, también en la comparación o el ejemplo. Así, para ilustración se pone en Física 194b27 s. la

Los pitagóricos comprenden la armonía como fenómeno-sonoro-logos, pero no, que esta es el real modo-de-ser del tiempo. Aristóteles comprende el tiempo como número (Zählen: conteo, contar), pero no la armonía como fenómeno-sonoro-logos. El puente entre ambos lo tiende la frase: La armonía es el logos del tiempo, del tiempo-identidad, del perdurar (Währen).

La constatación de Aristóteles[62] "Si ninguna otra cosa puede contar excepto el alma y el nous del alma, entonces es imposible, que exista el tiempo, si no existe el alma" responde a la observación de Leibniz que presupone la idea-de-armonía de los pitagóricos, que nuestra alma al percibir el sonido cuenta intuitivamente, por así decir, sin saberlo: "Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi" (- *Música es el ejercicio oculto de aritmética del alma que no sabe numerarse* - Carta a Goldbach, 17.4.1712). Mi enfoque contiene también aquí un vínculo, por así decir: el alma cuenta, al captar *relaciones*-numéricas (Zhalen*relationen*); el tiempo se manifiesta como relación real, como la relación-numérica (das Zahlenverhältnis); el alma capta el tiempo como lo *idéntico* y de este modo produce (zeitigt) un algo (Etwas), que, como relación numérica (perceptible), siempre es atribuido, a lo idéntico, al uno, *la medida común*.

---

octava (*δια πασων*) como la relación 2:1 (*τα δυο προς εν*) en la segunda de las cuatro causas (ver, sobre este pasaje, también nota 187).
En el restante se cita la armonía de Aristóteles en primer lugar como una disciplina (*αρμονικη*) - atribuible a la aritmética - (Ver también los pasajes con datos en L. Richter, Zur Wissenschaftslehre von der Musik bei Platon und Aristoteles, Berlin 1961, p. 149). - Los Problemata del Pseudo-Aristóteles son post-aristotélicos.

[62] [= 218] Física 223a25-28, ver nota 61.